

CORRIGÉ 136 page 77

① Soit  $z \in \mathbb{C}$

$$z = 3iz - 1 \iff 3iz - z = 1 \iff z(3i - 1) = 1 \iff z = \frac{1}{-1 + 3i} = \frac{-1 - 3i}{(-1)^2 + 3^2} = -\frac{1}{10} - i\frac{3}{10}$$

Appelons  $z_A$  cette solution (l'affixe du point A)

②  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = z_n - z_A$

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} + 3iz_n - 1 + \frac{1}{10} + i\frac{3}{10}$$

Analyse: on veut  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , or on l'a en fonction de  $z_n$ : il suffit donc d'exprimer  $z_n$  en fonction de

$u_n$  ( $z_n = u_n - \frac{1}{10} - i\frac{3}{10}$ ) et de remplacer:

$$u_{n+1} = 3i(u_n - \frac{1}{10} - i\frac{3}{10}) - 1 + \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} = 3iu_n - i\frac{3}{10} + \frac{9}{10} - 1 + \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} = 3iu_n$$

b) Montrons par récurrence que la propriété  $P(n)$ : «  $u_n = (\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^n \times i^n$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Initialisation: d'une part,  $u_0 = z_0 - z_A = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10}$

d'autre part,  $(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^0 \times i^0 = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10}$ ,

donc  $P(0)$  est vraie

Hérédité: soit  $k \in \mathbb{N}$  (c'est-à-dire un entier **fixé** mais **quelconque**).

Supposons  $P(k)$  vraie.

$u_{k+1} = 3iu_k = 3i(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^k \times i^k$  par hypothèse de récurrence.

$$u_{k+1} = 3iu_k = (\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^{k+1} \times i^{k+1}$$

Ainsi,  $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \implies P(k+1)$

Conclusion:  $P(n)$  est vraie au rang  $n = 0$  et est héréditaire, donc est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

③ a) Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$AM_n = |z_n - z_A| = |u_n| = |\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}| \times |3^n| \times |i^n| = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{9}{100}} \times 3^n \times |i|^n = \sqrt{\frac{10}{100}} \times 3^n \times 1^n = \frac{\sqrt{10}}{10} \times 3^n$$

Or,  $3 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

Donc, par produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10}}{10} \times 3^n = +\infty$  c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} AM_n = +\infty$

$$\begin{aligned} b) \quad (\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+2}}) &= \arg\left(\frac{z_{n+2} - z_A}{z_n - z_A}\right) = \arg\left(\frac{u_{n+2}}{u_n}\right) = \arg\left(\frac{(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^{n+2} \times i^{n+2}}{(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^n \times i^n}\right) \\ &= \arg(3^2 \times i^2) = \arg(-9) = \pi[2\pi] \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'angle est plat, donc les points A,  $M_n$  et  $M_{n+2}$  sont alignés.

$$c) \quad (\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_A}{z_n - z_A}\right) = \arg\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \arg\left(\frac{(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^{n+1} \times i^{n+1}}{(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}) \times 3^n \times i^n}\right) = \arg(3i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

donc  $(AM_n) \perp (AM_{n+1})$

①  $Z_C = -2 + i$

a)  $z_{C'} = \frac{1 - z_C}{\bar{z}_C - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3)^2 + (-1)^2} = -\frac{(3 - i)^2}{10} = -\frac{9 - 6i - 1}{10} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$

b)  $OC' = |z_{C'} - z_O| = |z_{C'}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$  donc  $C'$  est sur le cercle trigonométrique.

c)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \arg\left(\frac{z'_C - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{9}{5} + i\frac{3}{5}}{-3 + i}\right) = \arg\left(\frac{\frac{3}{5}(-3 + i)}{-3 + i}\right) = \arg\left(\frac{3}{5}\right) = 0[2\pi]$

Donc les points A, C et  $C'$  sont alignés

② Soient  $M(z)$  un point du plan distinct de A et  $M'(z')$  son point image.

$$M' = A \iff z' = 1 \iff 1 - z = \bar{z} - 1 \iff z + \bar{z} = 2 \iff 2\operatorname{Re}(z) = 2 \iff \operatorname{Re}(z) = 1$$

L'ensemble  $\Delta$  des points du plan ayant pour image le point A est donc la droite d'équation  $x = 1$ , droite privée du point A.

③ Soit  $z \neq 1$

$$|z'| = \left| \frac{1 - z}{\bar{z} - 1} \right| = \frac{|1 - z|}{|\bar{z} - 1|} = \frac{|1 - z|}{|\overline{z - 1}|} = \frac{|1 - z|}{|z - 1|} = \left| \frac{-(z - 1)}{z - 1} \right| = |-1| = 1$$

donc  $M' \in \mathcal{C}$

④ Soit  $z \neq 1$

$$\frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{\frac{1 - z}{\bar{z} - 1} - 1}{z - 1} = \frac{1 - z - (\bar{z} - 1)}{\bar{z} - 1} \times \frac{1}{z - 1} = \frac{2 - 2\operatorname{Re}(z)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} = 2 \frac{1 - \operatorname{Re}(z)}{|z - 1|^2}$$

qui est un nombre réel car tous les nombres apparaissant dans le dernier membre sont réels.

On en déduit que  $\arg\left(\frac{z' - 1}{z - 1}\right) \equiv 0[\pi]$  donc  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv 0[\pi]$  donc les points A, M,  $M'$  sont alignés.

⑤ On trace la droite  $(AD)$  car  $D'$  est sur cette droite d'après la question précédente.

On trace le cercle trigonométrique car  $D'$  est sur ce cercle d'après la question 3).

Cela donne deux points d'intersection: le point A et un autre si D a une abscisse égale à 1, alors  $D'$  est le point A; sinon  $D'$  est l'autre point d'intersection